DINAMIK SISTEM DISKRIT DIMENSI-2 YANG DITURUNKAN DARI SEBUAH KELUARGA PEMETAAN 12-PARAMETER QRT

Lazakaria[1)]

[1)]Jurusan Matematia FMIPA Universitas Lampung
Jl. Prof. Dr. Soemantri Brodjonegoro No. 1 Bandar Lampung 35145
Surel: lazakaria.1969@fmipa.unila.ac.id

ABSTRACT

The discussion of two-dimensional mapping in this paper is based on a member of a family of system derived from a family 12-parameters QRT mappings. By replacing the role of integral and parameter in a system of difference equations, we will generate a new mapping and show the properties of the new mapping, i.e. measure preserving property and reversing symmetry properties.

Keywords: measure preserving, QRT mapping, reversing symmetric, Two-dimensional mapping.

ABSTRAK

Sistem dinamik dimensi-2 yang didiskusikan dalam paper ini merupakan sebuah anggota keluarga sistem integrabel yang diturunkan dari suatu pemetaan yang dikenal dengan sebutan keluarga 12-parameter pemetaan QRT (*Quispel-Roberts-Thomson Mapping*). Dengan menggantikan sebuah parameter μ pada sistem yang integrabel tersebut dengan parameter μ yang ada pada integralnya akan diperoleh sebuah sistem baru. Sistem baru yang terbentuk diperlihatkan sifat-sifatnya dengan sistem lama. Adapun sifat-sifat yang dilihat adalah sifat mengawetkan ukuran dan kerkebalikan simetris.

Kata kunci: mengawetkan ukuran, pemetaan dimensi-2, pemetaan QRT, simetris yang berkebalikan.

PENDAHULUAN

Pemetaan QRT yang diperkenalkan oleh Quispel, Robert, dan Thomson di tahun 1989 merupakan sebuah pemetaan yang populer dengan sebutan pemetaan keluarga 12-parameter yang simetris, *integrable*, dan *measure preserving*. Pemetaan QRT ini dapat ditulis dalam bentuk persamaan diskrit orde dua berikut:

$$x_{n+2} = \frac{g_1(x_{n+1}) - x_n g_2(x_{n+1})}{g_2(x_{n+1}) - x_n g_3(x_{n+1})} \tag{1}$$

dengan $g_j, j = 0, 1, 2$ dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} g_0(x_{n+1}) \\ g_1(x_{n+1}) \\ g_2(x_{n+1}) \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times A_1 \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

dengan A_0 dan A_1 dalam persamaan (2) merupakan notasi untuk matriks simetris 3×3 yang didefinisikan sebagai berikut

$$A_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \beta_i & \epsilon_i & \zeta_i \\ \gamma_i & \zeta_i & \kappa_i \end{pmatrix}; i = 0{,}1. \tag{3}$$

Persamaan diskrit (1) mempunyai invarian/integral G yang berarti $G(x_n, x_{n+1}) = G(x_{n+1}, x_{n+2})$ yang dinyatakan dalam sebuah rasio polinomial bikuadratik berikut ini

$$G(x,y) = \frac{\alpha_0 x^2y^2 + \beta_0(x^2y + xy^2) + \gamma_0(x^2 + y^2) + \epsilon_0(x^2 + y^2) + \sigma_0(x + y) + \kappa_0}{\alpha_1 x^2y^2 + \beta_1(x^2y + xy^2) + \gamma_1(x^2 + y^2) + \epsilon_1(x^2 + y^2) + \sigma_1(x + y) + \kappa_1} \tag{4}$$

Perlu diketahui bahwa, sifat yang dimiliki pemetaan simetris QRT di atas antara lain *reversible* dan (anti) *measure preserving*.

Pandang persamaan diskrit berikut ini

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}(1 - \mu x_{n+1})}{x_n(x_{n+1} - \mu)}; \mu \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Persamaan diskrit (5) merupakan bentuk khusus dari persamaan diskrit (1). Dalam hal ini matriks simetris A_0 dan A_1 masing-masing berbentuk

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & -1 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Akibatnya, fungsi g_i, i $= 0, 1, 2$ dalam (2) berbentuk

$$\begin{pmatrix} g_0(x_{n+1}) \\ g_1(x_{n+1}) \\ g_2(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} - \mu x_{n+1}^3 \\ 0 \\ \mu x_{n+1} - x_{n+1}^3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dapat diperiksa bahwa persamaan diskrit (4) merupakan sebuah sistem dinamik yang diturunkan dari persamaan *generalized* ΔΔ-sine Gordon (Zakaria dkk, 2013). Pandang matriks simetris A_0 dan A_1 masing-masing berbentuk

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \mu \\ -1 & 1 & -1 \\ \mu & -1 & 1 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Dengan matriks simetris (7), fungsi g_i, $i = 0, 1, 2$ berbentuk

$$\begin{pmatrix} g_0(x_{n+1}) \\ g_1(x_{n+1}) \\ g_2(x_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1}^2 - \mu x_{n+1}^3 \\ 0 \\ \mu x_{n+1} - x_{n+1}^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Dari bentuk matriks simetris (7) dan vektor fungsi (8) maka bentuk khusus persamaan diskrit (1) adalah

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}(1 - \mu x_{n+1})}{x_n(x_{n+1} - \mu)}; \mu, \lambda \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Dalam artikel (Zakaria dkk, 2013), sebuah studi tentang pemetaan keluarga 3-parameter yang diturunkan dari suatu persamaan *generalized* ΔΔ-sine Gordon telah dibahas. Pemetaan keluarga 3-parameter yang dimaksud dinyatakan dalam bentuk persamaan beda parsial berikut ini :

$$\begin{gathered} \theta_1\left(V_{(l,m+1)}V_{(l+1,m)} - V_{(l+1,m+1)}V_{(l,m)}\right) + \\ \theta_2\left(V_{(l+1,m+1)}V_{(l,m+1)}V_{(l+1,m)}V_{(l,m)}\right) = \theta_3 \end{gathered} \tag{10}$$

Persamaan beda parsial (10) dapat direduksi kedalam beda ordiner dengan menggunakan kondisi *traveling wave solution*, yakni dengan memilih hubungan

$$V_{(l,m)} = V_{(n)}, n = z_1 l + z_2 m \tag{11}$$

dimana z_1 dan z_2 adalah bilangan bulat relatif prima. Dengan mensubsitusikan (11) ke dalam (10), kita mempunyai persamaan beda ordiner berikut ini:

$$\theta_1 (V_{(n+z_2)} V_{(n+z_1)} - V_{(n+z_1+z_2)} V_{(n)}) + \theta_2 \big(V_{(n+z_1+z_2)} V_{(n+z_2)} V_{(n+z_1)} V_{(n)}\big) = \theta_3 \tag{12}$$

Persamaan (12) dinamakan persamaan beda ordiner *generalized* ΔΔ-Sine Gordon yang merepresentasikan sebuah proses rekursif tak berhingga dari suatu pemetaan yang dilabelkan dengan z_1 dan z_2. Untuk z_1 dan z_2 yang ditetapkan, persamaan (12) merupakan sebuah pemetaan dari $\mathbb{R}^{z_1+z_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{z_1+z_2}$. Dapat dicatat bahwa bentuk standar persamaan (12) yang dinyatakan di dalam (Quispel dkk, 1991) diperoleh dengan memilih nilai paremeter $\theta_1 = pq$, $\theta_2 = 1$, dan $\theta_3 = 1$.

Pilih nilai $z_1 = 1$ dan $z_2 = 2$ pada persamaan (12) diperoleh

$$\theta_1 (V_{(n+2)} V_{(n+1)} - V_{(n+3)} V_{(n)}) + \theta_2 \big(V_{(n+3)} V_{(n+2)} V_{(n+1)} V_{(n)}\big) = \theta_3 \tag{13}$$

Persamaan (13) dapat ditulis sebagai suatu sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} V_{(n+3)} &= \frac{\big(\theta_3 - \theta_1 V_{(n+1)} V_{(n+2)}\big)}{V_n \big(\theta_2 V_{(n+1)} V_{(n+2)} - \theta_1\big)} \\ V_{(n+2)} &= V_{(n+1)} \\ V_{(n+1)} &= V_n \end{aligned} \tag{14}$$

Misalkan $\zeta^0 = V_{(n+1)} V_n$ dan $\zeta^1 = V_{(n+2)} V_{(n+1)}$. Subsitusikan ζ^0 dan ζ^1 ke dalam persamaan (14) diperoleh

i. $\zeta_n^0 = \zeta_n^1$

ii. $V_{(n+3)} = \frac{\zeta_n^0}{V_{(n+1)}} \frac{(V_{(n+2)})}{(V_{(n+2)})} = V_{(n+3)} V_{(n+2)} \frac{\zeta_n^0}{\zeta_n^1} = \frac{(\theta_3 - \theta_1 \zeta_n^1)}{(\theta_2 \zeta_n^1 - \theta_1)}$

Kemudian misalkan $\zeta_{n+1}^0 = \zeta_n^1$ dan $\zeta_{n+1}^1 = V_{(n+3)} V_{(n+2)}$, maka dari (i) dan (ii) diperoleh

$$\begin{aligned} \zeta_{n+1}^0 &= \zeta_n^1 \\ \zeta_{n+1}^1 &= \frac{\zeta_n^1}{\zeta_n^0}\frac{(\theta_3 - \theta_1\zeta_n^1)}{(\theta_2\zeta_n^1 - \theta_1)} \end{aligned} \tag{15}$$

atau

$$\zeta_{n+1} = g_\theta(\zeta_n) \tag{16}$$

dimana

$$g_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x(\theta_3 - \theta_1 x)}{y(\theta_2 x - \theta_1)}, x\right).$$

Persamaan (16) merupakan sebuah keluarga sistem dinamik Dimensi-2 berparameter tiga. Dengan kata lain, pemetaan (15) yang diturunkan dari sebuah persamaan *generalized* ΔΔ-sine Gordon Dimensi-3 dapat direduksi menjadi pemetaan Dimensi-2.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sifat Sistem Diskrit $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{x_n(1-\mu x_n)}{y_n(x_n-\mu)}$

Pilih nilai parameter $\theta_1 = \mu\theta_2$ dan nilai parameter $\theta_1 = \theta_2$, maka sistem dinamik (17) tidak lain adalah sebuah keluarga sistem dinamik dimensi-2 berparameter satu, yakni

$$\zeta_{n+1} = \tilde{g}_\mu(\zeta_n) \tag{17}$$

dimana

$$\tilde{g}_\mu : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x(1 - \mu x)}{y(x - \mu)}, x\right)$$

Pemetaan (17) mempunyai integral/invarian (terdapat sebuah fungsi $G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $G(\zeta_{n+1}) = G(\zeta_n)$ untuk semua bilangan asli *n*), yakni

$$G_\mu(x, y) = \mu\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - (x + y) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \tag{18}$$

Integral/invarian ini bermakna untuk semua bilangan asli n, solusi dari (17) senantiasa berada pada level set $G_\mu(x,y)$ (18).

Dapat diperiksa bahwa titik-titik $(\pm1,\pm1)$ dan $(\pm1,\mp1)$ masing-masing merupakan titik-titik tetap yang dinotasikan dengan (x^*,y^*) dan titik-titik periodik-2 yang dinotasikan dengan (x^{p_2},y^{p_2}) dari sistem (17). Selain mempunyai integral (18), sistem (17) mempunyai sifat yang lain diantaranya:

- Sistem (17) merupakan sistem *measure preserving* :

$$\mathrm{D}g_\mu(x,y)=\frac{-1+x^2\mu}{y^2(x^2-\mu)}=\frac{\rho(x,y)}{\rho\left(\frac{x(1-\mu x)}{y(x-\mu)},x\right)}.$$

  dimana $\rho(x,y)$ diberikan dalam bentuk

$$\rho(x,y)=\frac{1}{xy}.$$

- Terdapat sebuah *reversing symmetry* $L(x,y)=(y,x)$ sedemikian sehingga $L\circ g_\mu(x,y)\circ L^{-1}=g_\mu^{-1}(x,y)$.

  Dengan kata lain, sistem (17) *reversible*

$$g_\mu(x,y)\circ L\circ g_\mu(x,y)=L$$

- Terdapat sebuah involusi $S(x,y)=(x,-y)$ sedemikian sehingga

$$S\circ g_\mu(x,y)\circ S^{-1}=-g_\mu(x,y)$$

Hubungan antara (17) beserta involusi L dan (9), dapat dinyatakan sebagai

$$U_{SG}:x'=\frac{x(1-\mu x)}{y(x-\mu)},y'=x;\quad L:x'=y,y'=x$$

Ini artinya sistem (17) yang diturunkan dari persamaan *generalized* ΔΔ-sine Gordon adalah kasus khusus dari keluarga 12-parameter pemetaan reversing *symmeric integrable* QRT. Dapat dicatat bahwa pemetaan (17) mempunyai garis singular (garis dimana involusi tidak terdefinisi) dan garis simetris (garis yang melalui titik tetap involusi), yakni :

Garis Singular : $yg_2(x) - g_1(x) = 0 \rightarrow y\left(x\mu + x^3\right) = 0$

Garis Simetris : $y = x; y^2 g_2(x) - 2yg_1(x) + g_0(x) = 0$

$$\rightarrow x = y; x\left(x - x^2\mu + y^2(-x+\mu)\right) = 0$$

Reparameterisasi μ Pada Sistem Diskrit $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \frac{x_n(1-\mu x_n)}{y_n(x_n-\mu)}$

Roberts, J.A.G., *et.al.* (2002) memberikan jaminan bahwa pertukaran sebuah parameter dalam sistem diskrit yang *integrable* dengan parameter sejenis yang ada pada integral/invariannya dapat dilakukan dan menghasilkan sistem baru yang *integrable* pula. Menggunakan ide Roberts, J.A.G. *et.al.*, sistem diskrit *integrable* (17) dengan menggantikan parameter μ yang ada dalam sistem dengan parameter μ yang ada pada integral (18) diperoleh sebuah sistem baru. Berikut langkah dan hasil penukaran parameter yang dimaksudkan tersebut.

Pandang integral $G(x,y)$ (18). Perlu dicatat bahwa $G(x,y)$ adalah linear dalam μ.

Karena

$$G(x,y) = G\left(\frac{x(1-\mu x)}{y(x-\mu)}, x\right)$$

maka

$$G(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; G\left(\frac{x(1-\mu x)}{y(x-\mu)}, x\right) = 0$$

Oleh karena itu, kita mempunyai

$$\mu(x,y) = \frac{(x+y)(xy+1)}{x^2+y^2} \qquad (19)$$

Dapat diperiksa bahwa

$$\mu(x,y)=\mu\left(\frac{x(1-\mu x)}{y(x-\mu)},x\right)$$

Akibatnya, sistem (17), dengan menggantikan parameter μ yang ada padanya dengan $\mu(x,y)$ persamaan (19) diperoleh sebuah pemetaan baru yakni

$$(x,y)=g\ \ (x,y)=-\frac{x\left(x^3+x^2y+x-y\right)}{x^3-x^2y-x-y} \tag{20}$$

Pemetaan (20) memiliki sifat-sifat:

- Memiliki titik tetap (*fp*) dan titik periodik-2 (*tp*2) masing-masing $\left(x^{fp},y^{fp}\right)=(\pm1,\pm1)$ dan $\left(x^{tp_2},y^{tp_2}\right)=(\pm1,\mp1)$
- *Integrable* dengan integral
$$G(x,y)=\frac{(x+y)(xy+1)}{x^2+y^2}$$
- Mengawetkan ukuran (*measure preserving*) :
$$\mathrm{D}\,g_\mu(x,y)=\frac{2x^2\left(x^4+1\right)}{\left(-x^3+x^2y+x+y\right)^2}=\frac{\rho(x,y)}{\rho\left(-\dfrac{x\left(x^3+x^2y+x-y\right)}{x^3-x^2y-x-y},x\right)}.$$
dengan
$$\rho(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$$
- Terdapat sebuah semetris yang berkebalikan (*reversing symmetric*) $L(x,y)=(y,x)$ sedemikian sehingga
$$L\circ g\ \ (x,y)\circ(L)^{-1}=(g)^{-1}(x,y).$$

Dengan kata lain, sistem (17) *reversible*.

KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan yang telah disampaikan sebelumnya dapat disimpulkan bahwa dengan melakukan parametrisasi ulang terhadap sebuah parameter pada sebuah pemetaan dimensi-2 yang diturunkan dari sebuah persamaan *generalized* ΔΔ-sine Gordon menghasilkan pemetaan baru dengan titik tetap dan titik periodik-2 yang sama dengan pemetaan semula. Selain itu sifat *reversing symmetric* juga dipunyai oleh pemetaan semula dan pemetaan baru dengan sebuah involusi yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

Quispel GRW, Roberts JAG, & Thompson CJ. 1988. Integrable mappings and soliton equations. *Physics Letters A*. **126**:419-421.

Quispel GRW, Roberts JAG, & Thompson CJ. 1989. Integrable mappings and soliton equations II. *Physica D*. **34**:183-192.

Quispel GRW, Capel HW, Papageorgiou VG, & Nijhoff FW. 1991. *Integrable mappings derived from soliton equations*. *Physica A* **173** :243-266.

Roberts JAG, Iatrou A, & Quispel GRW. 2002. Interchanging parameters and integrals in dynamical systems: the mapping case, *J.Phys.A: Math. Gen* **55**: 2309-2325.

Tanaka H, Matsukidaira J, Nobe A, & Tsuda T. 2009. Constructing two dimensional integrable mappings that posses invariants of high degreee. *RIMS Kokyuroku Bessatsu* **13** : 75-84.

Zakaria L, Tuwankotta JM, & Budhi. 2013. The Normal Form For The Integral Of 3-Dimensional Maps Derived From A ΔΔ-Sine-Gordon Equation. *The Proceeding of SEACMA 2013*, Mathematics Department, ITS-Surabaya, ISBN: 978-979-96152-8-2, page AM33